Opción A

1..- Discutir según los valores de m la continuidad y derivabilidad de

$$f(x)=\begin{cases}3-mx^2 & si \quad x\le 1\\ \dfrac{2}{mx} & si \quad x>1\end{cases}$$

Para que la función sea derivable tiene que ser, inicialmente, continua

$$\begin{cases}f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3-m\cdot 1^2=3-m\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{2}{m\cdot 1}=\dfrac{2}{m}\end{cases}\Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3-m=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\frac{2}{m}\Rightarrow 3-m=\frac{2}{m}\Rightarrow$$

$$3m-m^2=2\Rightarrow m^2-3m+2=0\Rightarrow \Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1\ge 0\Rightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{3+1}{2}=2\\ m=\dfrac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

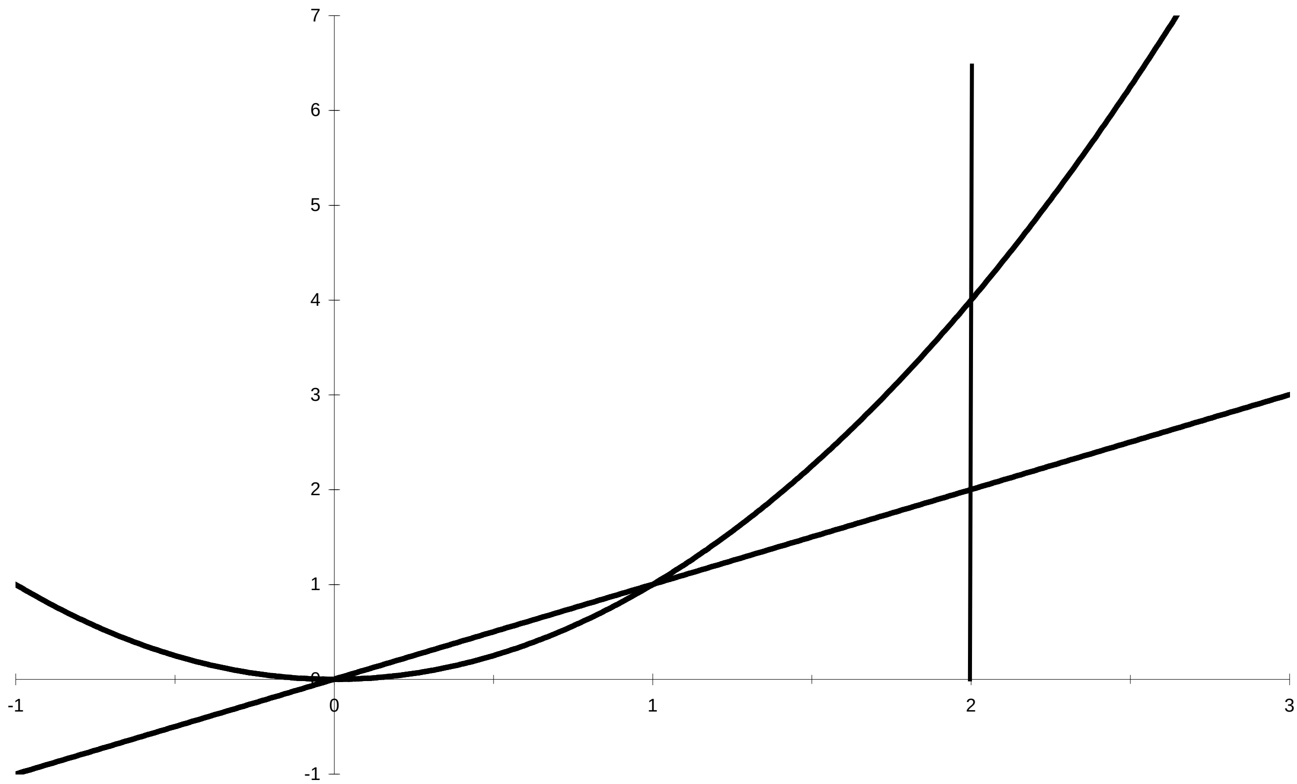
$$Para \begin{cases}m=2\\ m=1\end{cases} la \ \ función\ es\ continua, ahora\ veremos\ si\ derivable$$

$$f'(x)=\begin{cases}-2mx & si \quad x<1\\ -\dfrac{2}{mx^2} & si \quad x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-2m\cdot 1^2=-2m\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\dfrac{2}{m\cdot 1^2}=-\dfrac{2}{m}\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-2m=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\frac{2}{m}\Rightarrow$$

$$-2m=-\frac{2}{m}\Rightarrow m=\frac{1}{m}\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\ m=-1\end{cases}$$

Para **m = 1** la función es derivable (es continua y derivable)
Para **m = 2** la función es continua pero no es derivable
Para **m = -1** la función no es continua por lo tanto no es derivable

2.- a) Dibujar los recintos limitados por la curva **$y = x^2$** , y las rectas **$y = x$** , **$x = 2$**
b) Calcular las áreas de dichos recintos
a)



b)

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow (x-1)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1 - \frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1 + \frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^2 - \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^2$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left(1^2 - 0^2\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(1^3 - 0^3\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(2^3 - 1^3\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(2^2 - 1^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{6}{3} - \frac{2}{2} = 2 - 1 = 1\,u^2$$

3.- Discutir el sistema según los valores de **k** y resolverlo en el caso que sea compatible indeterminado $\begin{cases} kx+2z=0 \\ ky-z=k \\ x+3y+z=5 \end{cases}$

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=k^2-2k+3k=k^2+k \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow k^2+k=0 \Rightarrow (k+1)k=0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k+1=0 \Rightarrow k=-1 \end{cases}$$

$$\forall k \in \Re-\{-1\ ,0\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=\text{Número de incognitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$$

$Si\ k=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=2 \Rightarrow z=\frac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

Sistema Incompatible

$Si\ k=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=0 \Rightarrow z=\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \text{Sist. Comp. In det er min ado}$$

$$-z=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow x+3y+0=5 \Rightarrow x=5-3y \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x\ ,y\ ,z)=(5-3\lambda\ ,\lambda\ ,0)$$

4.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto **(2 , -4 , 0)** y contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ -3x+z=-2 \end{cases}$,

El plano π queda determinado por el vector director de la recta r, el vector entre el punto que denominaremos **P** y un punto **R** cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y el tercer vector que une a **P** con el punto **G** genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (se encuentran en el mismo plano) y el último es combinación lineal de los otros dos por ello el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida.

$$\begin{cases} y=4-x \\ z=-2+3x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=-2+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\ ,-1\ ,3) \\ R(0\ ,4\ ,-2) \end{cases}$$

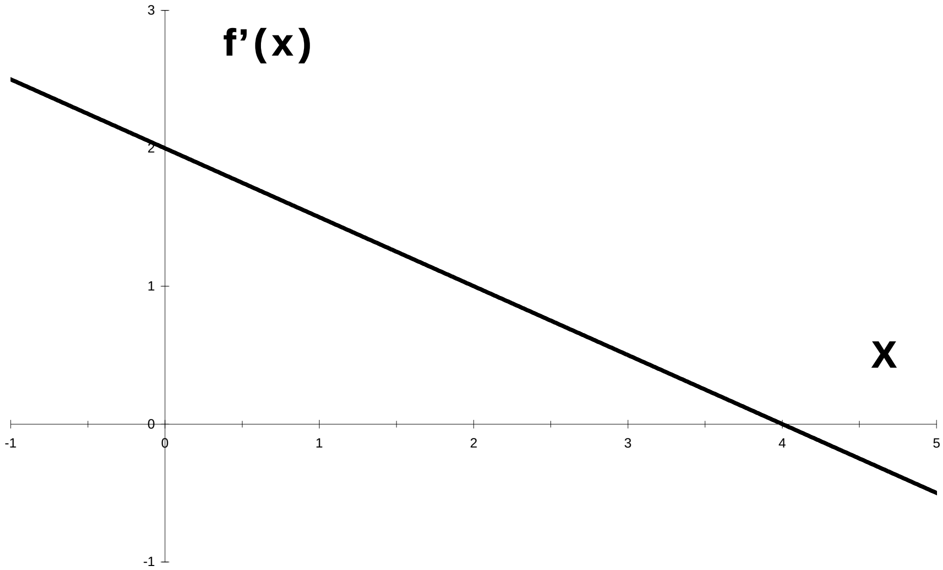
$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\ ,-1\ ,3) \\ \overrightarrow{PR}=(0\ ,4\ ,-2)-(2\ ,-4\ ,0)=(-2\ ,8\ ,-2)\equiv(1\ ,-4\ ,1) \\ \overrightarrow{PG}=(x\ ,y\ ,z)-(2\ ,-4\ ,0)=(x-2\ ,y+4\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$-12\ (x-2)+(y+4)-z+4\ z+(x-2)-3\ (y+4)=0 \Rightarrow -11\ (x-2)-2\ (y+4)+3\ z=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 11x+2y-3z-14=0$$

Opción B

1..- La siguiente gráfica corresponde a la función **f'(x)**, derivada de la función **f(x)**. Estudiar la monotonía, concavidad-convexidad, extremos relativos y puntos de inflexión de la función **f(x)** interpretando dicha gráfica



Analiticamente

$$m=\frac{2-0}{0-4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow y-0=-\frac{1}{2}\cdot(x-4)\Rightarrow f'(x)=-\frac{x}{2}+2\Rightarrow$$

$$f(x)=\int\left(-\frac{x}{2}+2\right)dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2+2x=-\frac{x^2}{4}+2x+K\Rightarrow f(0)=2\Rightarrow-\frac{0^2}{4}+2\cdot 0+K=2\Rightarrow K=2$$

$$f(x)=-\frac{x^2}{4}+2x+2$$

Crcimiento y decrecimiento

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot(x-4)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x-4>0\Rightarrow x>4\end{cases}$$

$-\infty$ 4 ∞

$-\frac{1}{2}<0$	(-)	(-)
x > 4	(-)	(+)
Solución	(+)	(-)

Crecimiento $\forall x\in\Re\,/\,x<4$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re\,/\,x>4$

Máximo relativo en x = 4 (De crecimiento pasa a decrecimiento)

Continuación del Problema 1 de la opción B

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow Concavo \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow Como\ f''(x) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow Convexo \Rightarrow \forall x \in \Re$$

Interpretación gráfica

El punto de corte con el eje OX indica un máximo o un mínimo como de positivo pasamos a negativo se trata de un máximo positivo

Al no haber máximo ni mínimos en la grafica de la derivada no hay puntos cuya derivada segunda se anule por ello no existen puntos de inflexión

Finalmente como la tangente del ángulo de la tangente geométrica (que coincide en toda la gráfica de la derivada) es negativo eso significa que la derivada segunda es menor que cero y la función es convexa en todo su recorrido.

El único valor que no nos da la gráfica, si el estudio analítico, es la ordenada en que se encuentra el máximo relativo de la función

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = -\frac{4^2}{4} + 2\cdot 4 + 2 = -4 + 8 + 2 = 6 \Rightarrow (4\ ,6)$$

2.- Calcula $\int \frac{3x}{x^2+3x-10}\,dx$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4\cdot 1\cdot(-10) = 9 + 40 = 49 > 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+7}{2} = 2 \\ x = \frac{-3-7}{2} = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{3x}{x^2+3x-10} = \frac{3x}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-2)}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow A(x+5) + B(x-2) = 3x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -5 \Rightarrow A(-5+5) + B(-5-2) = 3\cdot(-5) \Rightarrow -7B = -15 \Rightarrow B = \frac{15}{7} \\ x = 2 \Rightarrow A(2+5) + B(2-2) = 3\cdot 2 \Rightarrow 7A = 6 \Rightarrow A = \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{3x}{x^2+3x-10} = \frac{\frac{6}{7}}{x-2} + \frac{\frac{15}{7}}{x+5}$$

$$\int \frac{3x}{x^2+3x-10}\,dx = \frac{6}{7}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{15}{7}\int \frac{dx}{x+5} = \frac{6}{7}\int \frac{dt}{t} + \frac{15}{7}\int \frac{du}{u} = \frac{6}{7}\ln t + \frac{15}{7}\ln u = \frac{1}{7}\ln\left(t^6 \cdot u^{15}\right)$$

$$Cambio\ de\ var iable \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = t \Rightarrow dx = dt \\ x + 5 = u \Rightarrow dx = du \end{cases}$$

$$\int \frac{3x}{x^2+3x-10}\,dx = \ln\left(\sqrt[7]{t^6 \cdot u^{15}}\right) = \ln\left(u^2\sqrt[7]{t^6 \cdot u}\right) = \ln\left[(x+5)^2\sqrt[7]{(x-2)^6 \cdot (x+5)}\right] + K$$

3.- Resolver el sistema matricial $\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ -2X - 4Y = (-2)\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow -5Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{(-5)}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4X - 2Y = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 5X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4.- Dados los planos de ecuaciones $\begin{cases} ax - 2z = 15 \\ 2x + y + z = -7 \\ x + y + az = -8a \end{cases}$. Determinar los valores de **a** para que los tres planos pasen por una recta. Justificar.

Para que se corten los tres planos en una recta el sistema tiene que tener infinitas soluciones (los infinitos puntos de una recta) por lo tanto tiene que ser un sistema compatible indeterminado

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4 + 2 - a = a^2 - a - 2 \Rightarrow Si\ A = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow Son\ los\ dos\ valores\ que\ nos\ pueden\ dar\ la\ solución, veamos\ cual$$

$Si\ a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & -16 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 15 \\ -2 & -1 & -1 & 7 \\ -2 & -2 & -4 & 32 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & -1 & -3 & 22 \\ 0 & -2 & -6 & 47 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & -1 & -3 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 3 \Rightarrow$$

$$z = \frac{3}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible \Rightarrow a = 2\ no\ es\ la\ solución$$

Continuación del Problema 4 de la Opción B

$Si\ a = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & -3 & 23 \\ 0 & 1 & -3 & 23 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & -3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow El\ ultimo\ plano\ es\ combinación\ lineal\ de$$

$los\ otros\ dos\ con\ infinitos\ puntos\ como\ solución \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$y - 3z = 23 \Rightarrow y = 23 + 3z \Rightarrow -x - 2z = 15 \Rightarrow x = -15 - 2z \Rightarrow Recta\ común \Rightarrow r \begin{cases} x = -15 - 2\lambda \\ y = 23 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$a = -1\ es\ la\ solución$